

MATEMATIKA

Výrazy a rovnice 1 **učebnice**

OBSAH

1	NĚKDY NÁSOBÍME STEJNÉ ČINITELE	
	Mocnina	2
2	S MOCNINAMI MUSÍME POČÍTAT	
	Přednost operací, pravidla pro počítání s mocninami	8
3	KTERÉ ČÍSLO MÁME UMOCNIT, ABYCHOM DOSTALI OČEKÁVANÝ VÝSLEDEK?	
	Odmocniny	19
4	I PRO POČÍTÁNÍ S ODMOCNINAMI PLATÍ PRAVIDLA	
	Pravidla pro počítání s odmocninami	25
5	NĚKTERÉ JEDNOTKY OBSAHUJÍ MOCNINU	
	Převody jednotek obsahu a objemu	30
6	ZAČNEME POČÍTAT S PÍSMENY	
	Výraz, proměnná	36
7	PROMĚNNOU MŮŽEME UMOCNIT	
	Mnohočleny	44
8	KTERÉ ČÍSLO HLEDÁME?	
	Rovnice	53
9	K ČEMU NÁM ROVNICE POSLOUŽÍ?	
	Slovní úlohy	67
	VÝSLEDKY	72

Použité symboly:



Motivace k probíranému učivu na praktickém příkladu



Úvahové úlohy nebo otázky poukazující na další souvislosti probírané látky s běžným životem



Připomenutí učiva, na které nová látka navazuje

Zavedení a vysvětlení nového učiva



Nový pojem nebo postup



1 Řešené úlohy s podrobným vysvětlujícím komentářem

Závěrečné shrnutí na konci kapitoly

1. Základní sada úloh k procvičení, na kterou navazují úlohy v pracovním sešitě. Výsledky těchto úloh jsou uvedeny na konci učebnice.
- 2.

Schválilo MŠMT č. j.: MSMT-15 345/2016 dne 23. srpna 2016 k zařazení do seznamu učebnic pro základní vzdělávání jako součást ucelené řady učebnic pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace s dobou platnosti šest let.

Napsali: Mgr. Michaela Jedličková; RNDr. Peter Krupka, Ph.D.; RNDr. Jana Nechvátalová
Recenzentky: Mgr. Barbora Stušová; doc. RNDr. Nad'a Vondrová, Ph.D.

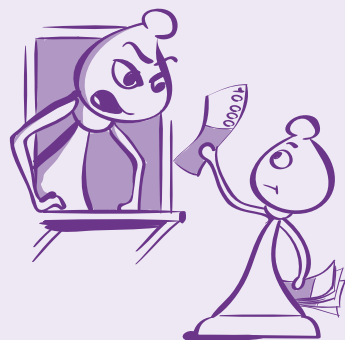
Illustrations © Martin Bašar, DiS.

© NOVÁ ŠKOLA, s.r.o., 2016

ISBN 978-80-7289----



Nejmenší používaná česká mince má hodnotu 1 Kč. 10 těchto mincí můžeme nahradit desetikorunou. 10 desetikorun nebo $10 \cdot 10$ korunových mincí můžeme nahradit stokorunou. Pro nahrazení 10 stokorun, popř. i $10 \cdot 10 \cdot 10$ korunových mincí, máme k dispozici tisícikorunovou bankovku. Bankovku s hodnotou $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ Kč už k dispozici nemáme. V jiných měnách však najdeme, nebo jsme v historii mohli nalézt, i bankovky mnohem vyšších hodnot.



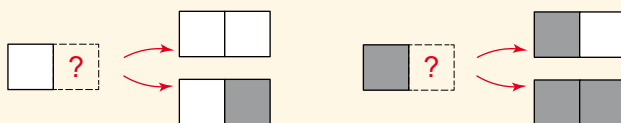
Na začátku 20. století, po první světové válce, postihla Německo hyperinflace – nekontrolovatelný pokles hodnoty peněz. Počátkem listopadu 1923 bylo nutné za dvoukilový bochník chleba zaplatit neskutečných 420 miliard marek (420 000 000 000 marek). Podaří se vám vyhledat obrázky bankovek z této doby?

Můžeme se dostat do situace, kdy musíme zapsat součin několika (někdy i velkého množství) stejných činitelů. Uvažujme např., že máme k dispozici dvě barvy (např. bílou a šedou) a vybarvujeme jimi čtverečky.

Když vybarvíme jeden čtvereček, máme 2 možnosti, může být bílý, nebo šedý:

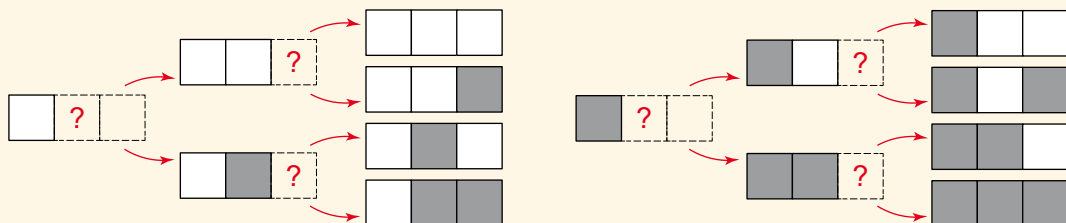


Když jsou dva čtverečky vedle sebe (a nemůžeme jejich pořadí zaměňovat), jsou možnosti 4:



Při určování počtu všech možností můžeme postupovat tak, že první čtvereček vybarvíme bíle, nebo šedě (to jsou dvě možnosti) a druhý čtvereček pak zase vybarvíme buď bíle, nebo šedě (ke každé volbě barvy prvního čtverečku tak máme dvě možnosti pro druhý čtvereček). Proto máme celkem $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, jak vybarvit dvojici čtverečků.

Když je třeba vybarvit tři čtverečky vedle sebe, můžeme postupovat podobně. Z obrázku je patrné, že možností, jak trojici čtverečků vybarvit, je celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$:



Kdybychom měli vybarvit čtveřici čtverečků, bylo by celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ možností, pro pětici čtverečků $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ možností atd.

Je jedno, zda jsou čtveřčky vedle sebe v řadě, nebo jsou uspořádány do jiného útvaru, třeba obdélníku. Výpočet počtu možností vybarvení bude stejný. Proto například 12 čtveřčků sestavených do obdélníku 3 krát 4 čtveřčky můžeme našim postupem vybarvit

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{12 \text{ činitelů}} = 4\,096 \text{ způsobů,}$$

obdélník sestavený ze 48 čtveřčků pak

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{48 \text{ činitelů}} = 281\,474\,976\,710\,656 \text{ způsobů.}$$



Zapišete, kolika způsoby vybarvíte tři čtveřčky, když máte na výběr více barev (např. bílou, žlutou, červenou a modrou)? A kolik je možností pro obarvení větších útvarů ještě více barvami? Jaké výpočty zvládne vaše kalkulačka?

Ačkoli obdélník sestavený z $6 \cdot 8 = 48$ čtveřčků není nijak velký, počet možností, jak jej vybarvit dvěma barvami, je obrovský, jde o číslo s 15 místy.

Pro zjednodušení zápisu čísel, která vznikla jako součin více stejných činitelů, proto používáme zápis, jemuž říkáme **mocnina**. Píšeme např. takto:

$$\underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ činitelů}} = 3^2 = 9 \quad \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ činitelů}} = 5^3 = 125 \quad \underbrace{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2}_{5 \text{ činitelů}} = 1,2^5 = 2,488\,32$$

Násobíme-li několik stejných činitelů, můžeme tento součin zapsat tak, že napíšeme tohoto činitele – nazýváme jej **základ mocniny** – a vpravo nad něj malým číslem uvedeme, kolik jich násobíme – toto číslo nazýváme **mocnitel** nebo také **exponent**.

Zápis 3^2 pak čteme *tři na druhou*. Tento zápis i výsledek výpočtu, tedy číslo 9, nazýváme druhou mocninou čísla 3. Podobně zápis 5^3 čteme *pět na třetí* a číslo 125 nazýváme třetí mocninou čísla 5.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_n = a^n$$

$$a^n \quad \begin{array}{l} \text{mocnitel (exponent)} \\ \text{základ mocniny} \end{array}$$

U zlomků používáme v zápise mocniny závorku, aby bylo zřejmé, jaký základ je **umocňován**. Píšeme tedy např.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

a zápis $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ čteme *dvě pětiny, to celé na čtvrtou*, zatímco zápis $\frac{2^4}{5}$ znamená, že umocňujeme pouze čitatele, čteme jej *2 na čtvrtou lomeno pěti*.

Mocninu s exponentem 1, tedy první mocninu, zavádíme takto:

$$3^1 = 3; 2,7^1 = 2,7; \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}; \text{ obecně } a^1 = a$$



Zápisu a^n říkáme **mocnina**. Jde o jiný zápis součinu $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ stejných činitelů}}$.

Číslo a se nazývá **základ mocniny**, přirozené číslo n **mocnitel**, popř. **exponent**. Zavádíme, že $a^1 = a$.

Když počítáme mocninu, říkáme také, že **umocňujeme**.



1 Zapište jako mocninu a zápis zdůvodněte.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $3,09 \cdot 3,09 \cdot 3,09$

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

Řešení:

a) 5^4 , protože v součinu jsou 4 činitelé.

b) $3,09^3$, protože v součinu jsou 3 činitelé.

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^6$, protože v součinu je 6 činitelů.

2 Mocninu zapište jako součin činitelů.

a) 8^2

b) $1,8^5$

c) $\left(\frac{2}{9}\right)^7$

Řešení:

a) $8^2 = 8 \cdot 8$

b) $1,8^5 = 1,8 \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot 1,8$

c) $\left(\frac{2}{9}\right)^7 = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}$

3 Mocninu zapište jako součin stejných činitelů a vypočítejte ji.

a) 10^2

b) 4^3

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

d) $0,3^2$

e) 8^1

f) 1^9

Řešení:

a) $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

b) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

d) $0,3^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

e) $8^1 = 8$

f) $1^9 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$



Víme, že při násobení čísel můžeme zaměňovat pořadí činitelů:

$$5 \cdot 7 = 35, \quad 7 \cdot 5 = 35, \quad 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Podobně můžeme počítat i v případě více činitelů a usnadnit si tak výpočet, např.:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 10 \cdot 21 = 210$$

4 Viktor měl vypočítat zadané úlohy co nejvýhodněji. Počítal správně?

a) $0,5 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 0,2 = 0,5 \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot 0,2 = 2 \cdot 0,3 = 0,6$

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

Řešení:

Ano, Viktor výhodně zaměnil pořadí činitelů a úlohy správně vyřešil.



V učebnici *Dělitelnost* jsme přirozená čísla rozkládali na součin prvočísel. Příklady těchto rozkladů jsou např.:

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \text{ nebo } 448 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

Ukázali jsme si, jak lze součin více stejných činitelů zapsat jako mocninu. Proto můžeme i **rozklad přirozeného čísla na prvočinitele** psát **pomocí mocnin** s tím, že exponenty rovny 1 obvykle neuvádíme:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad \text{popř. } 448 = 2^6 \cdot 7$$

Máme-li prvočísla v rozkladu uspořádána jinak než podle velikosti, zaměníme pořadí činitelů a pak můžeme rozklad snadno zapsat pomocí mocnin:

$$600 = 6 \cdot 100 = 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

5 Čísla rozložte na součin prvočísel a запиšte pomocí mocnin.

a) 16

b) 108

c) 5 445

Řešení:

a) $16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

b) $108 = 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$

c) $5\,445 = 5 \cdot 1\,089 = 5 \cdot 9 \cdot 121 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2$



V učebnici *Kladná a záporná čísla* jsme vysvětlili, jak počítáme součiny, ve kterých vystupují záporná čísla. Víme, že součin dvou záporných čísel je číslo kladné a že součin záporného čísla s kladným je číslo záporné. Je-li v součinu sudý počet záporných čísel, je výsledek kladné číslo, je-li v takovém součinu lichý počet záporných čísel, výsledek je číslo záporné.

$$3 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}\right) = -\left(3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\right) = -5$$

$$-0,5 \cdot 3 \cdot (-1,2) \cdot 2 \cdot 4 = 0,5 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 4 = 1,5 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 4 = 1,8 \cdot 2 \cdot 4 = 3,6 \cdot 4 = 14,4$$

To platí i v případě stejných činitelů:

$$-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -32$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

Pro **zápis součinu**, ve kterém vystupuje více stejných činitelů, můžeme použít mocninu. Lichý počet stejných činitelů zapíšeme jako mocninu s lichým exponentem, sudý počet stejných činitelů jako mocninu se sudým exponentem:

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^5 = -32$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

Stejně jako v případě mocniny zlomku, používáme i v případě mocniny záporného čísla závorku, aby bylo zřejmé, jaký základ je umocňován. Tedy zápis $(-2)^5$ čteme *minus dvě, to celé na pátou* a zápis $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ čteme *minus jedna třetina, to celé na čtvrtou*.



Je-li základ mocniny kladné číslo a exponent číslo sudé nebo liché, jde vždy o kladné číslo.

Je-li základ mocniny záporné číslo a exponent číslo liché, jde o záporné číslo.

Je-li základ mocniny záporné číslo a exponent číslo sudé, jde o kladné číslo.



6

Bez počítání určete, zda bude výsledek výpočtu mocniny kladné, nebo záporné číslo. Zdůvodněte.

a) $(-8)^2$ b) $(-12)^3$ c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^5$ d) $(-0,11)^{21}$ e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{43}$ f) $(-1,5)^{202}$

Řešení:

U úloh a) a f) je exponent sudé číslo, proto výsledek bude kladné číslo.

U úloh b), c), d) a e) je exponent liché číslo, proto výsledek bude záporné číslo.

7

Vypočítejte.

a) $(-1)^2$ b) $(-1)^3$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ d) $(-2)^2 \cdot (-3)^3$ e) $(-1)^3 \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^1$

Řešení:

a) $(-1)^2 = 1$ b) $(-1)^3 = -1$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

d) $(-2)^2 \cdot (-3)^3 = 4 \cdot (-27) = -108$ e) $(-1)^3 \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^1 = (-1) \cdot (-32) \cdot (-3) = -96$

Zápis a^n , kde a je libovolné a n přirozené číslo, znamená jiný zápis součinu $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_n$. Zápis a^n se nazývá n -tá mocnina.

Číslo a se nazývá základ mocniny a číslo n mocnitel nebo také exponent.

Lichá mocnina záporného čísla je číslo záporné, sudá mocnina záporného čísla je číslo kladné.

Úlohy k procvičení:

- Přečtěte zápisy mocnin.
a) 8^2 b) 3^3 c) $2,9^5$ d) $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ e) $(-4)^{10}$ f) $0,7^1$ g) $0,33^9$
- Vypočítejte z paměti druhé mocniny čísel 10; 5; 0; 1; -8; 0,2; $\frac{1}{3}$; 40 a $\frac{4}{9}$.
- Zapište jako součin stejných činitelů.
a) 5^3 b) $0,7^2$ c) $\left(\frac{1}{9}\right)^4$ d) $2,1^5$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ f) $(-3)^4$ g) $1\,200^2$
- Z čísel 1, 3, 4, 9, 10, 64, 77, 81 a 100 vyberte ta, která jsou druhými mocninami přirozených čísel, a určete jejich základ druhé mocniny.
- Písemným násobením vypočítejte dané mocniny.
a) 43^2 b) $0,9^4$ c) 101^2 d) $2\,002^3$
- Pomocí mocnin zapište rozklady na prvočinitele.
a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ b) $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ c) $19 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 11 \cdot 19$
- Rozložte daná čísla na součin prvočísel a zapište pomocí mocnin.
a) 48 b) 100 c) 625 d) 1 600
- Zadané mocniny správně přečtěte a určete, zda bude výsledek výpočtu mocniny kladné, nebo záporné číslo.
a) $(-3)^9$ b) $(-2)^4$ c) $(-0,01)^1$ d) $\left(-\frac{11}{3}\right)^2$
- Vypočítejte pomocí matematických tabulek nebo kalkulačky.
a) 77^2 b) $(-108)^3$ c) $\left(\frac{16}{27}\right)^2$ d) $(-905)^2$
- Vytvořte správné dvojice.

2^5	5^4	$(-4)^4$	3^3	$(-3)^2$	$(-2)^7$
27	-128	256	32	625	9

Kapitola 1

1. a) Osm na druhou; b) tři na třetí; c) dvě celé devět desetin na pátou; d) tři sedminy, to celé na čtvrtou; e) minus čtyři, to celé na desátou; f) nula celá sedm desetin na prvou; g) nula celá třicet tři setiny na devátou. 2. 100; 25; 0; 1; 64; 0,04; $\frac{1}{9}$; 1 600; $\frac{16}{81}$. 3. a) $5 \cdot 5 \cdot 5$; b) $0,7 \cdot 0,7$; c) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$; d) $2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1$; e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$; f) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; g) $1\,200 \cdot 1\,200$. 4. Druhými mocninami jsou: 1; 4; 9; 64; 81; 100; základ: 1; 2; 3; 8; 9; 10. 5. a) 1 849; b) 0,656 1; c) 10 201; d) 8 024 024 008. 6. a) $3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$; c) $7 \cdot 11^2 \cdot 19^3$. 7. a) $2^4 \cdot 3$; b) $2^2 \cdot 5^2$; c) 5^4 ; d) $2^6 \cdot 5^2$. 8. a) Minus tři, to celé na devátou; -; b) minus dvě, to celé na čtvrtou; +; c) minus nula celá jedna setina, to celé na prvou; -; d) minus jedenáct třetin, to celé na druhou; +. 9. a) 5 929; b) -1 259 712; c) $\frac{256}{729}$; d) 819 025. 10. $2^5 = 32$; $5^4 = 625$; $(-4)^4 = 256$; $3^3 = 27$; $(-3)^2 = 9$; $(-2)^7 = -128$.

Záznam o použití učebnice		
ŠKOLNÍ ROK	JMÉNO ŽÁKA/ŽÁKYNĚ	STAV UČEBNICE

Mgr. Michaela Jedličková; RNDr. Peter Krupka, Ph.D.; RNDr. Jana Nechvátalová

MATEMATIKA

Výrazy a rovnice 1 učebnice

pro 2. stupeň základních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií

Recenzentky

Mgr. Barbora Stušová; doc. RNDr. Nad'a Vondrová, Ph.D.

Odborná spolupráce

Mgr. Petra Havlová

Pedagogická spolupráce

Mgr. Zuzana Kohlová

Redakční spolupráce

Mgr. Magdalena Konečná, Ph.D.

Jazyková spolupráce

Mgr. Kamila Kořínková; Mgr. Lenka Bičanová, Ph.D.

Překlad vybraných slov do anglického a německého jazyka

Mgr. Kamila Kořínková; PhDr. Alena Kovářová

Odpovědná redaktorka

Mgr. Michaela Jedličková

Ilustrace

Martin Bašar, DiS.

Grafická úprava

Martin Bašar, DiS.; RNDr. Peter Krupka, Ph.D.

První vydání (2016)

Vytiskla

Tiskárna Nový Malín

Vydala

NOVÁ ŠKOLA, s.r.o.

Bratislavská 23d, 602 00 Brno

tel./fax: 545 222 286, 545 110 365

e-mail: nns@nns.cz

www.nns.cz